课堂测验二

1. 判断 $\int_{1}^{2} \frac{x}{4-x^{2}} dx$ 的敛散性。

解:

不难看出, x=2 是这个定积分的暇点。注意到

$$\lim_{x \to 2^{-}} \frac{\frac{x}{4-x^{2}}}{\frac{1}{2-x}} = \lim_{x \to 2^{-}} \frac{x}{2+x} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

因此 $\int_1^2 \frac{x}{4-x^2} dx$ 与 $\int_1^2 \frac{1}{2-x} dx$ 具有相同的敛散性。

$$\begin{split} \int_{1}^{2} \frac{1}{2-x} \, \mathrm{d}x &= -\ln(2-x) \bigg|_{1}^{2} \\ &= \lim_{s \to 2^{-}} -\ln(2-s) + \ln(2-1) \\ &= -\lim_{s \to 2^{-}} \ln(2-s) \\ &= \infty. \end{split}$$

因此
$$\int_{1}^{2} \frac{x}{4-x^{2}} dx$$
 也是发散的。